Cotas superiores e inferiores del primer autovalor no nulo de una red pesada

Bendito, E.; Carmona, A.; Encinas, A.M.; Gesto, J.M. *

Matemàtica Aplicada III
UPC,
Jordi Girona Salgado 1-3,Barcelona
`andres.marcos.encinas@upc.edu`

Resumen. En este trabajo se presentan cotas superiores e inferiores del primer autovalor no nulo de una red pesada, en términos de medidas de equilibrio de los subconjuntos de vértices cuyo complementario tiene cardinal igual a 1. También mostramos la bondad de las cotas obtenidas a partir del análisis de algunos grafos para los que se conoce o bien el valor exacto del primer autovalor no nulo o bien su comportamiento asintótico con el tamaño del grafo.

Palabras clave. Redes pesadas, laplaciano discreto, autovalores, medidas de equilibrio.

1. Introduction

Es bien conocido que la obtención del primer autovalor no nulo de un grafo o una red es un problema NP-completo. Por tanto, cualquier acotación no trivial tiene gran interés y es potencialmente importante. En los últimos años se han obtenido cotas del primer autovalor no nulo de una red en términos únicamente de parámetros relevantes de la propia red, tales como el tamaño, orden, diámetro o grado, ver por ejemplo [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

Las técnicas que usaremos aquí son las usuales en este contexto, es decir se basan en la aplicación de la versión discreta de la Identidad de Green y en la caracterización variacional de los autovalores. La principal novedad del trabajo reside en el tipo de funciones utilizadas, concretamente las medidas de equilibrio de los complementarios de conjuntos unipuntuales. El uso de medidas de equilibrio en este contexto fue introducido en [1] para determinar cotas de la constante de Cheeger y del primer autovalor de los problemas de Dirichlet planteados sobre una red. Un análisis más completo, contemplando problemas de contorno autoadjuntos más generales, ha sido realizado en [2].

*Parcialmente financiado por la ETSECCPB y por el proyecto BFM2003-06014.

2. Preliminares

En esta comunicación $\Gamma = (V,E)$ denotará un grafo finito simple conexo y sin lazos cuyos conjuntos de vértices y de ramas son V y E, respectivamente. Dos vértices $x,y \in V$ se denominan *adyacentes*, lo que representaremos como $x \sim y$, si $\{x,y\} \in E$. Los conjuntos de funciones reales en V y en $V \times V$ se denotarán por $\mathscr{C}(V)$ y $\mathscr{C}(V \times V)$, respectivamente. En particular, denotaremos por 1 a la función constantemente igual a 1 en V. Por otra parte, si $u \in \mathscr{C}(V)$, entonces el valor $\sum\limits_{y \in V} u(y)$ será denotado por $\displaystyle\int_V u\,dy$.

Denominaremos *red* a un par (Γ,c) donde $\Gamma = (V,E)$ es un grafo finito simple conexo y sin lazos y $c \in \mathscr{C}(V \times V)$ es simétrica y satisface que $c(x,y) > 0$ cuyo $x \sim y$ y $c(x,y) = 0$ en otro caso.

El operador de *Laplace-Beltrami* de la red (Γ,c) es el operador lineal

$$\mathscr{L}_c \colon \mathscr{C}(V) \longrightarrow \mathscr{C}(V)$$

que asigna a cada $u \in \mathscr{C}(V)$ la función

$$\mathscr{L}_c u(x) = \int_V c(x,y)\big(u(x) - u(y)\big)\,dy, \quad x \in V. \tag{1}$$

Es bien conocido que el operador de Laplace-Beltrami de la red (Γ,c) es autoadjunto, es decir satisface la denominada *Identidad de Green*

$$\int_V v\mathscr{L}_c u\,dy = \int_V u\mathscr{L}_c v\,dy, \qquad \text{para cada} \quad u,v \in \mathscr{C}(V). \tag{2}$$

Denominaremos *función de peso en V*, o simplemente *peso* a cada función $\nu \in \mathscr{C}(V)$ que satisface que $\nu(x) > 0$ para cada $x \in V$. Una red pesada es una tripleta (Γ,c,ν) donde (Γ,c) es una red y ν un peso sobre V.

Fijada una red pesada (Γ,c,ν), para cada $u \in \mathscr{C}(V)$ consideraremos los valores

$$||u||_{1,\nu} = \int_V |u|\,\nu\,dy \quad \text{ y } \quad ||u||_{2,\nu} = \left(\int_V u^2 \nu\,dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

y en particular, definimos el *volumen de* V como $\mathrm{vol}_\nu(V) = ||1||_{1,\nu}$. Cuando $\nu = 1$, omitiremos ν en las notaciones anteriores. En este caso, $\mathrm{vol}(V)$ no es más que el cardinal de V.

Para cada subconjunto propio $F \subset V$, existe $\gamma^{\nu,F} \in \mathscr{C}(V)$, denominada *medida de equilibrio de F* y caracterizada por satisfacer que $\gamma^{\nu,F}(x) > 0$ para cada $x \in F$, $\gamma^{\nu,F}(x) = 0$ si $x \in V \setminus F$ y $\mathscr{L}_c\gamma^{\nu,F} = \nu$ sobre F, ver por ejemplo [1] y las referencias allí citadas. En particular, cuando $F = V \setminus \{x\}$, la medida de equilibrio de F será denotada simplemente por γ_x^ν. Nuevamente omitiremos el símbolo ν cuyo $\nu = 1$.

Aplicando la Identidad de Green (2), obtenemos que

$$\mathsf{vol}_\nu(V) = \nu(x) - \mathscr{L}_c \gamma_x^\nu(x) + \int_V \mathscr{L}_c \gamma_x^\nu \, dy$$

y en definitiva que la actuación del operador de Laplace-Beltrami sobre cada medida de equilibrio de cada conjunto $V \setminus \{x\}$ es

$$\mathscr{L}_c \gamma_x^\nu = \nu - \mathsf{vol}_\nu(V)\, \varepsilon_x. \tag{3}$$

3. Autovalores de una red

Si (Γ, c, ν) es una red pesada, el *problema de autovalores para el operador de Laplace-Beltrami, con respecto del peso* ν consiste en encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que existe $u \in \mathscr{C}(V)$ no nula que verifica

$$\mathscr{L}(u) = \lambda\, \nu\, u. \tag{4}$$

Es bien conocido, ver por ejemplo [5], que $\lambda = 0$ es autovalor simple de (4) cuyas autofunciones son constantes y que el resto de autovalores son estrictamente positivos.

En lo sucesivo, denotaremos por $\lambda(\Gamma, c, \nu)$ al primer autovalor no nulo del problema (4), que puede caracterizarse desde un punto de vista variacional, ver [2, 5], como

$$\lambda(\Gamma, c, \nu) = \min_{u \in \mathscr{C}(V)} \left\{ ||u||_{2,\nu}^{-2} \int_V u \mathscr{L} u \, dx : \int_V u \nu \, dx = 0 \right\}. \tag{5}$$

Nuestro objetivo es determinar cotas superiores e inferiores de $\lambda(\Gamma, c, \nu)$ en términos de las medidas de equilibrio γ_x^ν, con $x \in V$. El resultado fundamental, es el siguiente:

Proposición 1. *If* (Γ, c, ν) *es una red pesada, entonces se satisface que*

$$\min_{x \in V} \left\{ \frac{\mathsf{vol}_\nu(V)}{||\gamma_x^\nu||_{1,\nu}} \right\} \leq \lambda(\Gamma, c, \nu) \leq \min_{x \in V} \left\{ \frac{\mathsf{vol}_\nu(V) ||\gamma_x^\nu||_{1,\nu}}{\mathsf{vol}_\nu(V) ||\gamma_x^\nu||_{2,\nu}^2 - ||\gamma_x^\nu||_{1,\nu}^2} \right\}.$$

Demostración. Fijado $x \in V$, consideremos $v = ||\gamma_x^\nu||_{1,\nu} - \mathsf{vol}_\nu(V)\, \gamma_x^\nu$. Entonces se tiene que $\int_V v \nu \, dy = 0$, $\int_V v \mathscr{L}_c v \, dy = \mathsf{vol}_\nu(V)^2 ||\gamma_x^\nu||_{1,\nu}$ y además que $||v||_{2,\nu}^2 = \mathsf{vol}_\nu(V)^2 ||\gamma_x^\nu||_{2,\nu}^2 - \mathsf{vol}_\nu(V) ||\gamma_x^\nu||_{1,\nu}^2$. Por otra parte, como se verifica que $v(x) =$

$||\gamma_x^\nu||_{1,\nu} > 0$, entonces ν no es nula y la última cantidad es estrictamente positiva, de manera que la cota superior sigue de la caracterización variacional de $\lambda(\Gamma,c,\nu)$.

Por otra parte, si $u \in \mathscr{C}(V)$ es una autofunción no nula asociada a $\lambda(\Gamma,c,\nu)$, necesariamente $\displaystyle\int_V u\,\nu\,dy = 0$ y además, aplicando nuevamente la Identidad de Green, para cada $x \in V$ resulta que

$$\begin{aligned}\lambda(\Gamma,c,\nu)\int_V u\,\gamma_x^\nu\,\nu\,dy &= \int_V \gamma_x^\nu\,\mathscr{L}_c u\,dy = \int_V u\,\mathscr{L}_c\gamma_x^\nu\,dy \\ &= \int_V u\,\nu\,dy - \mathsf{vol}_\nu(V)\,u(x) = -\mathsf{vol}_\nu(V)\,u(x),\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la identidad (3). Además, como $\lambda(\Gamma,c,\nu) > 0$, la identidad anterior implica que

$$\mathsf{vol}_\nu(V)|u(x)| = \lambda(\Gamma,c,\nu)\left|\int_V u\,\gamma_x^\nu\,\nu\,dy\right| \le \lambda(\Gamma,c,\nu)\int_V |u|\,\gamma_x^\nu\,\nu\,dy, \qquad x \in V.$$

Por tanto, si $x_0 \in V$ es tal que $|u(x_0)| = \max_{x\in V}\{|u(x)|\}$, entonces

$$\int_V |u|\,\gamma_{x_0}^\nu\,\nu\,dy \le |u(x_0)|\,||\gamma_{x_0}^\nu||_{1,\nu}$$

y en consecuencia, $\mathsf{vol}_\nu(V) \le \lambda(\Gamma,c,\nu)\,||\gamma_{x_0}^\nu||_{1,\nu}$, de donde la cota inferior resulta inmediatamente. □

Concluiremos esta comunicación mostrando la bondad de las cotas obtenidas, contrastando los resultados con algunos ejemplos de grafos para los que se conocen cotas del primer autovalor no nulo. Como en todos los casos $c(x,y) = 1$ cuando $x \sim y$ y $\nu = 1$, el autovalor $\lambda(\Gamma,c,\nu)$ será denotado simplemente por $\lambda(\Gamma)$.

Ejemplo 1: El camino de $n \ge 2$ vértices, P_n.

Supondremos que $P_n = \{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\}$. En este caso, es sencillo comprobar que para cada $j = 0,\ldots,n-1$, la medida de equilibrio γ_{x_j} está determinada por la identidad

$$\gamma_{x_j}(x_i) = \frac{1}{2}(j-i)(j+i+1) - n(j-i)\begin{cases} 0, & 0 \le i \le j, \\ 1, & j \le i \le n-1, \end{cases}$$

lo que implica que $||\gamma_{x_j}||_1 = \dfrac{n}{6}(n-1)(2n-1) - nj(n-j-1)$ y por tanto

$$||\gamma_{x_j}||_1^2 = \frac{n^2}{36}(n-1)^2(2n-1)^2 + n^2 j^2(n-j-1)^2 - \frac{n^2 j}{3}(n-j-1)(n-1)(2n-1).$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
||\gamma_{x_j}||_2^2 = \frac{n}{30}\,(n-1)(2n-1)\big(2n(n-1)+1\big) \\
-\,\frac{nj}{3}\,(n-j-1)\big(2n(n-1)-2j(n-j-1)+1\big),
\end{aligned}
$$

lo que implica que

$$
n||\gamma_{x_j}||_2^2 - ||\gamma_{x_j}||_1^2 = \frac{n^2}{180}\,(n^2-1)(4n^2-1) - \frac{n^2}{3}\,j(j+1)(n-j)(n-j-1).
$$

En definitiva, para cada $j = 0,\ldots,n-1$ tenemos que

$$
\frac{n||\gamma_{x_j}||_1}{n||\gamma_{x_j}||_2^2 - ||\gamma_{x_j}||_1^2} = \frac{30[(n-1)(2n-1)-6j(n-j-1)]}{(n^2-1)(4n^2-1)-60j(j+1)(n-j)(n-j-1)},
$$

expresión que toma su mínimo valor en $j = 0$ cuando $n \leq 4$ y en

$$
j = \left\lfloor \frac{n-1}{2} + \frac{1}{30}\sqrt{30\sqrt{10(4n^2-1)(n^2-1)} - 75(n^2-1)} \right\rfloor,
$$

si $n > 4$, mientras que el mínimo de $\dfrac{n}{||\gamma_{x_j}||_1}$ se alcanza en $j = 0$, para cualquier n. Obtenemos pues que las cotas determinadas por la proposición son

$$
\frac{6}{(n-1)(2n-1)} \leq \lambda(P_n) \leq \frac{30}{(n+1)(2n+1)}, \quad n \geq 2,
$$

lo que implica que $\dfrac{3}{n^2} \leq \lambda(P_n) \leq \dfrac{15}{n^2}$, mientras que es bien conocido, ver [5], que $\lambda(P_n) = 2 - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \approx \dfrac{\pi^2}{n^2}$.

Ejemplo 2: El grafo dumbbell de $n = 2k$, $k \geq 2$, vértices, D_n.

Este tipo de grafos se construyen partiendo de dos grafos completos de k vértices, L y R, unidos por una rama que conecta dos vértices arbitrariamente escogidos $x \in L$ y $\hat{x} \in R$. Claramente, la simetría del grafo hace que sea suficiente calcular las medidas de equilibrio γ_y para $y \in L$. Si $y \neq x$, entonces

$$
\gamma_y(z) = \begin{cases}
n, & \text{si } \; z \in L,\; z \neq x, \\
n-1, & \text{si } \; z = x, \\
\dfrac{3n-2}{2}, & \text{si } \; z = \hat{x}, \\
\dfrac{3n}{2}, & \text{si } \; z \in R,\; z \neq \hat{x},
\end{cases}
$$

de donde $||\gamma_y||_1 = \frac{1}{4}(5n^2-4k-8)$ y $||\gamma_y||_2^2 = \frac{1}{8}(13n^3-8n^2-40n+16)$. Por otra parte,

$$\gamma_x(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z \in L,\ z \neq x, \\ \frac{n}{2}, & \text{si } z = \hat{x}, \\ \frac{n+2}{2}, & \text{si } z \in R,\ z \neq \hat{x}, \end{cases}$$

lo que implica que $||\gamma_x||_1 = \frac{1}{4}(n^2+4n-8)$ y $||\gamma_x||_2^2 = \frac{1}{8}(n^3+4n^2-16)$. En definitiva,

$$\frac{4n}{5n^2-4n-8} \leq \lambda(D_n) \leq \frac{4n(n^2+32n-64)}{n^4+32n-64},$$

lo que confirma la estimación $\lambda(D_n) \in \mathscr{O}(n^{-1})$ obtenida en [3].

Ejemplo 3: El grafo barbell de $n = 6k-1$, $k \geq 1$, vértices, B_n.

Este tipo de grafos se construyen partiendo de un camino de $2k+1$ vertices, etiquetados como $x_{-k},\dots,x_0,\dots,x_k$ en cada uno de cuyos extremos, x_{-k} y x_k, se adjunta un grafo completo de $2k$ vértices usando un conjunto de $2k-1$ nuevos vértices, que denotaremos por L y R respectivamente. Claramente, la simetría del grafo hace que sea suficiente calcular las medidas de equilibrio γ_x para $x \in R \cup \{x_0,\dots,x_k\}$. Fijado $x \in R$, entonces

$$\gamma_x(y) = \begin{cases} \frac{n(n^2+2n+37)}{6(n+1)}, & \text{si } y \in L, \\ \frac{7n^3+15n^2+369n-71}{72(n+1)} - \frac{i}{2}(n+i), & \text{si } y = x_i,\ i = -k,\dots,k, \\ \frac{3n}{n+1}, & \text{si } y \in R,\ y \neq x, \end{cases}$$

lo que implica que $||\gamma_x||_1 = \frac{1}{86(n+1)}(7n^4+28n^3+411n^2+523n-110)$ y

$$||\gamma_x||_2^2 = \frac{94n^7+373n^6+7734n^5+13145n^4+170651n^3-73968n^2-97649n+10060}{7290(n+1)^2}.$$

Por otra parte, si $j=0,\dots,k$, entonces

$$\gamma_{x_j}(y)=\begin{cases} \dfrac{(n+1)(5n-1)}{72}+\dfrac{j}{2}(n+j)+1, & \text{si } y\in L,\\ \dfrac{(j-i)}{2}(n+j+i), & \text{si } y=x_i,\ i=-k,\dots,j,\\ \dfrac{(i-j)}{2}(n-i-j), & \text{si } y=x_i,\ i=j,\dots,k\\ \dfrac{(n+1)(5n-1)}{72}-\dfrac{j}{2}(n+j)+1, & \text{si } y\in R,, \end{cases}$$

lo que implica que $||\gamma_{x_j}||_1=||\gamma_{x_0}||_1+j^2n$ y también que

$$||\gamma_{x_j}||_2^2=||\gamma_{x_0}||_2^2+\frac{j^2}{81}\big(54j^2n+25n^3+3n^3+57n-110\big),$$

donde $||\gamma_{x_0}||_1=\dfrac{1}{324}(513n^3+324n^2+5427n-1880)$ y además

$$||\gamma_{x_0}||_2^2=\frac{1}{648}\Big(37k^5+50n^4+970n^3-1070n^2+4793n-12620\Big).$$

Por tanto, $\dfrac{648n}{53n^3+51n^2+411n-833}\le\lambda(B_n)$, si $n=5,11,17$, mientras que $\dfrac{81n(n+1)}{7n^4+28n^3+411n^2+523n-110}\le\lambda(B_n)$, cuando $n\ge 23$. Además en cualquier caso,

$$\lambda(B_n)\le\frac{810n(n+1)(7n^4+28n^3+411n^2+523n-110)}{356n^8-563n^7+4226n^6-185075n^5-430831n^4-4903172n^3-2709931n^2+1241140n-121000}$$

Todo lo anterior confirma la estimación $\lambda(B_n)\in\mathscr{O}(n^{-2})$ obtenida también en [3].

Bibliografía

[1] E. BENDITO, A. CARMONA y A. M. ENCINAS, *Acotación de la constante de Cheeger y los autovalores del Operador de Laplace de una red*, IV Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica, UPM, (2004), 255–262.

[2] E. BENDITO, A. CARMONA, A. M. ENCINAS y J.M. GESTO, *Cheeger constant, Eigenvalues y Equilibrium Measures of Networks*, Submitted.

[3] S. BOBKOV, C. HOUDRÉ y P. TETALI, λ_∞, *vertex isoperimetry y concentration*, Combinatorica **20** (2000), 153–172.

[4] A. BERMAN y X.D. ZHANG, *Lowers bounds for the eigenvalues of Laplacian matrices*, Linear Algebra Appl. **316** (2000), 13–20.

[5] F.R.K. CHUNG, *Spectral Graph Theory*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **92**, AMS, 1997.

[6] S. DRAGOMIR y E. BARLETTA, *A new upper bound on the Cheeger number of a graph*, J. Combin. Theo. Serie B, **82** (2001), 167–174.

[7] J-S. LI y X-D. ZHANG, *On the Laplacian eigenvalues of a graph*, Linear Algebra Appl., **285** (1998), 305–307.

[8] Y. OHNO y H. URAKAWA, *On the first eigenvalue of the combinatorial Laplacian for a graph*, Interdiscip. Inform. Sci., **1** (1994), 33–46.

[9] H. URAKAWA, *The Cheeger constant, the heat kernel, and the Green kernel of an infinite graph*, Monatsh. Math. **138** (2003), 225–237.